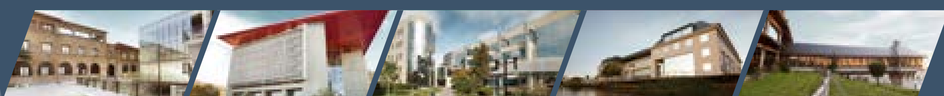
UNIVERSIDAD SAN SEBASTIAN

Serie Creación - Documento de trabajo n°16:

MATEMÁTICA FINANCIERA



CIES
Centro de Investigación para la Educación Superior

Autor:
María Paz Sato Inzunza

INDICE

Los Documentos de Trabajo son una publicación del Centro de Investigación en Educación Superior (CIES) de la Universidad San Sebastián que divulgan los trabajos de investigación en docencia y en políticas públicas realizados por académicos y profesionales de la universidad o solicitados a terceros.

El objetivo de la serie es contribuir al debate de temáticas relevantes de las políticas públicas de educación superior y de nuevos enfoques en el análisis de estrategias, innovaciones y resultados en la docencia universitaria. La difusión de estos documentos contribuye a la divulgación de las investigaciones y al intercambio de ideas de carácter preliminar para discusión y debate académico.

UNIVERSIDAD SAN SEBASTIAN
EDICIONES

En caso de citar esta obra:

Sato, M. (2017). Matemática Financiera. Serie Creación n°16. Facultad de Economía y Negocios. Centro de Investigación Sobre Educación Superior CIES - USS; Santiago.

SERIE CREACIÓN Nº 16

Matemática Financiera

MATEMÁTICA FINANCIERA

Las tasas de interés están presentes implícita o explícitamente en las decisiones de todos los agentes de la economía, ya sea de las personas cuando deben elegir si ahorrar su dinero o gastarlo inmediatamente, en la decisión de renovar su televisor y pagarlo al contado o utilizando su tarjeta de crédito y pactándolo en cuotas, o en decisiones de consumo más grandes como comprar un automóvil o una casa; en las decisiones de inversión de las empresas, ya sea en activos de renta fija o variable o de ampliación productiva; incluso de instituciones tan grandes como el Banco Central y el Gobierno. Es por ello que entender el concepto de tasa de interés es sumamente importante, sobre todo para profesionales del rubro financiero.

Iniciaremos este documento con una definición básica de tasa de interés, luego estudiaremos los tipos de interés -simple y compuesto- y finalmente revisaremos el comportamiento de las anualidades a través del tiempo.

TASA DE INTERÉS

La tasa de interés representa el precio del dinero y se expresa como un porcentaje del capital. La tasa de interés es una cuota que se paga ya sea por prestar dinero o por invertirlo. Por ejemplo, si Juan le presta a Alicia $1.000 a inicios de mes con el compromiso de que Alicia le devuelva $1.100 a Juan a finales de mes, la tasa de interés cobrado por Juan es de 10% y equivale a $100.

Antes de continuar, se deben definir algunos conceptos elementales en el desarrollo de esta materia y la nomenclatura utilizada en este documento:

- Capital (): cantidad de dinero inicial.

- Tasa de interés (): costo del dinero en el tiempo. Se expresa como un porcentaje del capital por periodo.
- Interés : cantidad de dinero obtenida en cada periodo por concepto de intereses.
- Monto (): cantidad total de dinero obtenida a futuro.
- Tiempo (): número de periodos en que el capital está afecto a intereses.

Existen dos tipos de interés: simple y compuesto. A continuación se estudian sus principales diferencias.

INTERÉS SIMPLE

El interés simple se calcula y se paga sobre un capital inicial que permanece constante. No considera la reinversión de los intereses ganados en periodos anteriores.

$$I_s = C * i * n \quad (1)$$

Matemáticamente, se expresa utilizando la siguiente fórmula:

La cantidad de dinero obtenida en el futuro -monto-, afecta a interés simple, se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$M_s = C(1 + i \cdot n) \qquad (2)$$

Ejemplo 1:
Una persona pide un crédito a una institución financiera de $300.000. Las condiciones del crédito son que el capital será pagado en dos

meses a una tasa de interés de 2% mensual simple. Calcule el interés pagado en este periodo.

Solución:
Identificar la información del problema: capital: $300.000, tasa de interés: 2% mensual simple, número de periodos: 2 meses.

Nota importante: Es esencial que la tasa de interés () y el número de periodos () se expresen en la misma unidad de tiempo, para que exista consistencia en los cálculos. En este ejercicio, ambos datos son mensuales, por lo que no debemos hacer ninguna transformación. .

Se utiliza la fórmula (1) para reemplazar los valores:

$$I_s = C * i * n$$
$$I_s = \$300.000 * 0,02 * 2$$
$$I_s = \$12.000$$

- ✓ La persona pagará $12.000 de intereses.

Ejemplo 2:
Una persona compra un bono de $100.000 a una empresa, el cual tiene una duración de 3 años. El bono paga una tasa de interés simple de 4,5% trimestral.

Calcule el valor del bono al final de su vida y el interés ganado durante este periodo.

Solución:
Identificar la información del problema: capital: $100.000, tasa de interés: 4,5% trimestral, número de periodos: 3 años.

Luego, para obtener el cálculo de manera más rápida y sin tener que estimar los intereses de cada periodo, se utiliza la fórmula (2):

$$M_s = C(1 + i \cdot n)$$

Se reemplazan los valores del ejercicio, sin embargo, hay que tener cuidado en que la tasa de interés y el número de periodos no están en la misma unidad de medida, por lo tanto, se deben transformar los años a trimestres, para ello, se utiliza la regla de 3:

1 año → 4 trimestres
3 años → x

$$x = \frac{3 \text{ años} \cdot 4 \text{ trimestres}}{1 \text{ año}} = 12 \text{ trimestres}$$

Por lo tanto, 12 trimestres.

Ahora utilizamos la fórmula (2) y reemplazamos los valores:

$$M_s = \$100.000 \cdot (1 + 0{,}045 \cdot 12)$$
$$M_s = \$154.000$$

- ✓ El valor del bono al final de su vida útil será de $154.000.

Se calcula el interés ganado durante la vida del bono con la siguiente fórmula:

Reemplazando los valores:

$$I_s = \$154.000 - \$100.000$$
$$I_s = \$54.000$$

- ✓ El interés ganado durante el periodo es de $54.000.

En el apéndice encontrará el despeje de todas las variables en interés simple.

INTERÉS COMPUESTO

El interés compuesto es aquel que se genera en cada periodo al agregar al capital inicial los intereses del periodo, generando un nuevo capital sobre el cual en el siguiente periodo se calcula un nuevo interés. Este proceso es conocido como **capitalización de los intereses**.

Para calcular el interés compuesto se utiliza la siguiente fórmula:

$$M_c = C \cdot (1 + i)^n \qquad (4)$$

Se ilustra el proceso de capitalización del interés compuesto a través de un simple ejemplo.

Ejemplo 3:

Una persona ahorra $1.000.000 y pretende invertirlo por un periodo de 1 año en el banco. El banco le ofrece una tasa de 1,5% mensual compuesto.

Muestre cómo evoluciona el capital y los intereses en los 3 primeros meses.

Solución:

- Cálculo con 1 mes.

Se reemplazan los valores en la fórmula (4):

$$M_c = C \cdot (1+i)^{n}$$
$$M_c = \$1.000.000 \cdot (1+0{,}015)^{1}$$
$$M_c = \$1.015.000$$

- ✓ El monto el primer mes es de $1.015.000.

El interés ganado en este periodo se calcula con la fórmula (3):

$$I_s = M_s - C \quad (3)$$
$$I_s = \$1.015.000 - \$1.00.000$$
$$I_s = \$15.000$$

- ✓ El interés ganado durante el primer mes es de $15.000.

- Cálculo con 2 meses.

Se reemplazan los valores en la fórmula (4):

$$M_c = C \cdot (1+i)^{n}$$
$$M_c = \$1.000.000 \cdot (1+0{,}015)^{2}$$
$$M_c = \$1.030.225$$

- ✓ El monto el segundo mes es de $1.030.225.

El interés acumulado al segundo mes se calcula con la fórmula (3):

$$I_s = M_s - C \quad (3)$$
$$I_s = \$1.030.225 - \$1.00.000$$
$$I_s = \$30.225$$

- ✓ El interés acumulado durante los dos primeros meses es de $30.225.
- ✓ El interés ganado el segundo mes es de $15.225

- Cálculo con 3 meses.

Se reemplazan los valores en la fórmula (4):

$$M_c = C \cdot (1+i)^{n}$$
$$M_c = \$1.000.000 \cdot (1+0{,}015)^{3}$$
$$M_c = \$1.045.678$$

- ✓ El monto el tercer mes es de $1.045.678.

El interés acumulado al segundo mes se calcula con la fórmula (3):

$$I_s = M_s - C \quad (3)$$
$$I_s = \$1.045.678 - \$1.00.000$$
$$I_s = \$45.678$$

- ✓ El interés acumulado durante los tres primeros meses es de $45.678.
- ✓ El interés ganado el tercer mes es de $15.453

Como se observa en el ejercicio, todos los periodos los intereses aumentan a una tasa de 1,5%. Esto sucede porque al capital inicial su suman los intereses generándose un nuevo capital para el periodo siguiente, este es el proceso de capitalización.

En el apéndice encontrará el despeje de todas las variables en interés compuesto.

ANUALIDADES

Hasta ahora se ha trabajado con problemáticas que presentan un pago único (capital inicial) y se ha analizado cómo evoluciona en el tiempo, sin embargo, en la cotidianidad en muy habitual realizar pagos o depósitos de cuotas, a las que matemáticamente se les conoce como anualidades.

Una anualidad es una serie de pagos periódicos. Por ejemplo, la colegiatura que se paga mensualmente, el pago de la cuota de un crédito automotriz o hipotecario.

Se trabaja con los siguientes supuestos:

- Una anualidad implica una serie de pagos iguales.

- Todos los pagos se realizan al final de un período de capitalización.

Valor presente de una anualidad

El Valor Presente[1] de una anualidad es la cantidad de dinero actual que es equivalente a una serie de pagos en el futuro.

El valor presente de una anualidad se calcula como:

1 Se utiliza el término Valor Presente como símil de Capital, con la diferencia que al referirnos a Valor Presente, este consta de una serie de pagos llamados "anualidades".

$$VP = R \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \qquad (4)$$

Donde:

- VP: valor presente de la anualidad
- R:monto de la anualidad
- i:tasa de interés por periodo
- n:número de pagos de anualidades

Ejemplo 4:

Una empresa está evaluando la alternativa de ampliar su negocio, puesto que hay demanda insatisfecha y se prevén buenos retornos a futuro. Dado un estudio de mercado y análisis del proyecto, la empresa estima que recibirá un flujo de caja de $1.500.000 mensual durante los 5 primeros años de funcionamiento del proyecto. El área de nuevos proyectos de la empresa ha determinado que la tasa de costo del capital a la que se deben descontar los flujos es de 1,5% mensual. Determine el valor actual neto de los flujos.

Solución:

Se identifica la información del problema: monto de la anualidad: $1.500.000 mensuales, tasa de interés: 1,5% mensual, número de periodos: 5 años.

Utilizando la fórmula (4):

$$VP = R \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}\right]$$

Se reemplazan los valores del ejercicio, sin embargo, la tasa de interés y el número de periodos no están en la misma unidad de medida, por lo tanto, antes de aplicar la fórmula, debemos transformar los años a meses, para ello, se utiliza una regla de 3:

1 año → 12 meses
5 años → x

$$x = \frac{5\ años \cdot 12\ meses}{1\ año} = 60\ meses$$

Por lo tanto, 60 meses.

Ahora se reemplazan los valores en la fórmula:

$$VP = \$1.500.000 \cdot \left[\frac{(1 + 0{,}015)^{60} - 1}{0{,}015 \cdot (1 + 0{,}015)^{60}}\right]$$
$$VP = \$59.070.403$$

- ✓ El valor presente de los flujos generados a futuro es $59.070.403.

VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD

El Valor Futuro[2] (VF) de una anualidad corresponde al valor futuro de la suma de los pagos iguales distribuidos a lo largo del tiempo.
El valor futuro de una anualidad se calcula como:

$$VF = R \cdot \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right] \qquad (5)$$

2 Se utiliza el término Valor Futuro como símil de Monto, con la diferencia que al referirnos a Valor Futuro, este consta de una serie de pagos llamados "anualidades".

Ejemplo 5:
La madre de Juan es muy organiza y planea ahorrar mensualmente $55.000 para la educación de su hijo, para ello, abrirá una cuenta de ahorros en el banco, el cual le ofrece una tasa de 6% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál debería ser el saldo de su cuenta dentro de diez años? ¿Cuánto interés ganará?

Solución:
Se identifica la información del problema: monto de la anualidad: $55.000 mensuales, tasa de interés: 6% anual capitalizable mensual, número de periodos: 10 años.

Utilizando la fórmula (5):

$$VF = R \cdot \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right]$$

Antes de reemplazar los valores en la fórmula, se deben modificar los datos para que todos estén en la misma unidad de medida.

En la mayoría de los problemas, las tasas de interés se expresan como anuales capitalizables por periodo. Cuando esto ocurre, la tasa de interés por periodo de capitalización se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$i = \frac{Tasa\ de\ interés\ anual}{n°\ de\ capitalizaciones\ del\ periodo} \qquad (6)$$

En este caso, dado que la tasa es 6% anual capitalizable mensualmente, se divide la tasa en 12, que corresponde al número de meses que tiene un año.

$$i = \frac{6\%}{12} = 0{,}5\%\ mensual$$

Luego, se deben convertir los años a meses, utilizando la regla de tres:

1 año → 12 meses
10 años → x

$$x = \frac{10\ años \cdot 12\ meses}{1\ año} = 120\ meses$$

Por lo tanto, 120 meses.

Ahora reemplazamos los valores en la fórmula:

$$VF = R \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$VF = \$55.000 \cdot \left[\frac{(1+0{,}005)^{120} - 1}{0{,}005}\right]$$

$$VF = \$9.013.364$$

- ✓ El saldo de la cuenta al finalizar los 10 años será de \$9.013.364.

-Podemos representar el interés ganado durante el periodo como:

$$I = VF - (n \cdot R)$$

Reemplazando los valores:

$$I = \$9.013.364 - (120 \cdot \$55.000)$$

$$I = \$9.013.364 - \$6.600.000$$

$$I = \$2.413.364.$$

- ✓ El interés ganado durante los 10 años es de .

APÉNDICE

1. Despeje de variables en interés simple:

- $M_s = C(1 + i$
- $C = \frac{M}{(1+i*n)}$
- $i = \frac{M-C}{C*n}$

2. Despeje de variables en interés compuesto:

- $M_c = C(1+i)^n$
- $C = \frac{M}{(1+i)^n}$
- $i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1$
- $n = \frac{logM - logC}{\log(1+i)}$